.... **3A-X**

Lineare Algebra I: Klausur 1

30.07.2021 15:00–17:00 Uhr

Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
Bitte studieren Sie bis dahin lediglich dieses Deckblatt.

- Sie müssen Ihre medizinische Maske oder Ihre FFP2-Maske während der gesamten Klausur tragen. Achten Sie darauf, dass sie Mund *und* Nase abdeckt.
- Bitte halten Sie vor, während und nach der Klausur den vorgeschriebenen Mindestabstand von 1,5 m zu allen anderen Anwesenden ein.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name: ....
  Matrikelnr.: ....

- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens trennen. Wir werden sie wieder zusammenheften.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.
- Verlassen Sie nach der Klausur den Campus auf direktem Weg unter Einhaltung des Mindestabstands.
- Wenn Sie Ihr Ergebnis auf der Webseite zur Vorlesung einsehen möchten, bevor es im Studierendenportal sichtbar wird, benötigen Sie eine PIN. Ihre PIN lautet: ....

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgende Gerade g und die folgende Ebene E in $\mathbb{R}^3$:

$$g := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \right\}$$

(a) Haben g und E in $\mathbb{R}^3$ einen gemeinsamen Schnittpunkt? Wenn ja, welchen?

(b) Geben Sie eine Gerade g' an, die die Gerade g in genau einem Punkt schneidet, aber die Ebene E nicht schneidet. Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Gerade diese Forderungen erfüllt!

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende inhomogene reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter t:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \\
 & & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & t \\
-x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\
3x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & = & -3
\end{array}
$$

(a) Bestimmen Sie alle reellen Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das gegebene inhomogene System mindestens eine reelle Lösung besitzt.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(c) Bestimmen Sie den Lösungsraum des gegebenen *inhomogenen* Gleichungssystems für $t = 1$.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3
Gegeben sind die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$:

$$V := \{{}^t(x \quad y \quad z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0\}$$
$$W := \{{}^t(x \quad y \quad z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Tupel $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ jeweils Basen von V bzw. W sind:

$$\mathcal{B} := (\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \mathcal{C} := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$
$$\mathcal{B}' := (\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \mathcal{C}' := (\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(b) Sei $F\colon V \to W$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gegeben ist durch die Matrix

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(F)$!

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Die folgenden Relationen auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind **symmetrisch**:

☐ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y$ ist durch 7 teilbar

☐ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x = 2y$

☐ $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \cdot y = 3$

(2) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto a - b \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ \frac{p}{q} &\mapsto \frac{q}{p} \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\ (a, b) &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$

(3) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen den Mengen A und B nennen wir **injektiv**, wenn gilt:

☐ Zu jedem $b \in B$ existiert mindestens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

☐ Zu jedem $a \in A$ existiert höchstens ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.

☐ Aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt $a_1 = a_2$.

(4) Seien X, Y, Z Mengen. Für die Komposition $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ der Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ gilt:

☐ Ist f surjektiv, so ist auch $f \circ g$ surjektiv.

☐ Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist f surjektiv.

☐ Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist f injektiv.

(5) Für jede **Gruppe** $(G, \star)$ gilt:

☐ Die Verknüpfung $\star$ ist assoziativ.

☐ Die Verknüpfung $\star$ ist kommutativ.

☐ Die Verknüpfung $\star$ ist symmetrisch.

(6) Die **symmetrische Gruppe** $\mathbb{S}_3$ besteht aus

☐ den bijektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$.

☐ den symmetrischen 3×3-Matrizen.

☐ allen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(7) Die folgenden Ringe sind Körper:

☐ $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen)

☐ $\mathbb{R}[t]$ (Polynomring über $\mathbb{R}$)

(8) In jedem **Körper** K gilt:

☐ Die Addition ist assoziativ und kommutativ.

☐ Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.

☐ Für je drei Elemente $\alpha, \beta, \gamma \in K$ ist $\alpha + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$.

Aufgabe 5

Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Zur Struktur eines K-**Vektorraums** gehört

☐ eine Verknüpfung $V \times V \to V$.

☐ eine Abbildung $V \times V \to K$.

☐ eine Abbildung $K \times V \to V$.

(2) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Wir können die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ auffassen als einen ein-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{N}$. (Konvention: $0 \in \mathbb{N}$)

☐ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen als einen ein-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

☐ Wir können die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen als einen ein-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

(3) Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ in einem Vektorraum V bilden genau dann ein **Erzeugendensystem von** V, wenn gilt:

☐ Für jedes $\mathbf{v} \in V$ existieren $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, sodass gilt $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$.

☐ Für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ ist $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 \in V$.

☐ Für jeden Vektor $\mathbf{v} \in V$ gibt es ein $\alpha \in K$, sodass entweder gilt $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_1$ oder $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_2$.

(4) Ein Tupel von Vektoren $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist eine **Basis** eines Vektorraums V, wenn gilt:

☐ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist linear unabhängig und ist ein Erzeugendensystem von V.

☐ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist linear abhängig und ist ein Erzeugendensystem von V.

☐ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ist linear unabhängig und ist ein Erzeugendensystem von $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

(5) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (4x+y, -5y)$ wird bezüglich der Standardbasis durch folgende Matrix dargestellt:

☐ $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

(6) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ sind invertierbar:

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$

(7) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

☐ $\operatorname{rang}(A) = n$.

☐ A ist ähnlich ist zur Einheitsmatrix (d.h. es gibt eine invertierbare Matrix T, sodass $T^{-1}AT$ die Einheitsmatrix ist).

☐ $\det(A) \neq 0$.

Aufgabe 6

Wir fixieren einen Körper K und betrachten den K-Vektorraum $\mathrm{M}(n \times n; K)$ der $n \times n$-Matrizen. Die Spur einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ist definiert als

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}(n \times n; K) \to K$ definiert.

(b) Zeigen Sie ferner, dass die Abbildung tr surjektiv ist.

(c) Sei M^0 die Menge der spurlosen Matrizen, also

$$\mathrm{M}^0 := \{A \in \mathrm{M}(n \times n; K) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass M^0 ein Untervektorraum von $\mathrm{M}(n \times n; K)$ ist.

(d) Berechnen Sie $\dim_K(\mathrm{M}^0)$!

(e) Sei M^δ die Menge der Matrizen, deren Determinante verschwindet, also

$$\mathrm{M}^\delta := \{A \in \mathrm{M}(n \times n; K) \mid \det(A) = 0\}.$$

Ist M^δ auch ein Untervektorraum von $\mathrm{M}(n \times n; K)$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung: